MAT 421: Introduction to Real Analysis I
Pranvere 2012, Provim Final

Stefan Kohl

Data: 30.06.2012, Ora: 10:00 - 12:00

Emri, Mbiemri: ____________________

Pergjigjuni 6 pyetje e meposhtme. Nuk i lejohet te perdore asgje pervec leter e bardhe dhe nje stilolaps. Maksimumi i pikeve te mundshme eshte 40.

1. A konvergjojne seritet e meposhtme? – Nese seritet konvergjojne, gjeni vleren e tyre. (Shembull: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.)

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{20}n}$
2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$
3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$
4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{4^m}{m!}\right)^n$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$
6. $\sum_{n=0}^{\infty} n! \cdot \sin(n\pi)$

(12 pike)

2. Gjeni funksione $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ te vazhdueshme te tille qe

1. $f(1) > 1$ dhe $\forall x \in \mathbb{R}\ f(2x) = f(x)^2$,
2. $g^{-1}(0) = \{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

(4 pike)

3. Tregoni qe bashkesia e funksioneve $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ te cilet jane e diferencueshem ne cdo $x \in \mathbb{R}$ eshte e panumerueshem. (4 pike)

4. Per cdo $n \in \mathbb{N}$, le te jete $f_n : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+,\ x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$. A konvergjon vargu e funksioneve (f_n)? Nese po, gjeni funksionin $f := \lim_{n\to\infty} f_n$. A eshte konvergjenca uniforme, apo vetem pikesore? (4 pike)

5. Gjeni variacionet total $\mathrm{V}_0^{\pi}(x \mapsto \sin x)$, $\mathrm{V}_{-1}^{1}(x \mapsto x^2)$, $\mathrm{V}_0^{\ln(2)}(x \mapsto e^x)$ dhe $\mathrm{V}_0^{e^4}(x \mapsto e^x)$. (4 pike)

6. Vertetoni apo gjeni kundershembuj:

1. Cdo funksion i cili eshte i diferencueshem ne cdo $x \in \mathbb{R}$ eshte i kufizuar.
2. Cdo funksion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i cili eshte bijektiv eshte i vazhdueshem ne cdo $x \in \mathbb{R}$.
3. Cdo funksion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i cili eshte i vazhdueshem ne cdo $x \in \mathbb{R}$ eshte injektiv.
4. Cdo funksion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i vazhdueshem i cili eshte bijektiv eshte i diferencueshem ne cdo $x \in \mathbb{R}$
5. Le te jete $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nje funksion i cili eshte i vazhdueshem ne cdo $x \in \mathbb{R}$. Nese ne kemi $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) \in \mathbb{Q}$, funksioni f eshte gjithmon konstant.
6. Nese nje varg (a_n) ka nje pike e akumulimit, edhe bashkesia $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ka te pakten nje pike e akumulimit.

(12 pike)