MAT 421: Introduction to Real Analysis I
Pranvere 2012, Provim 1, Pergjigje

Stefan Kohl

1. A konvergjojne vargjet dhe seritet e meposhtme?:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}$	4. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^6}{n!}$	7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$	10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{7^n}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(-1)^n}$	5. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!}$	8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$	11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{5n}$	6. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{2^n}}{n!}$	9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$	12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

(12 pike, nje per cdo pergjigje te sakte)
Pergjigja: Vargjet / seritet 1., 4., 5., 8., 9., 10., 11. dhe 12. konvergjojne, dhe 2., 3., 6. dhe 7. nuk konvergjojne.

2. Gjeni derivatin $f'(x)$ per funksionet e meposhtme:

1. $f(x) = 4x^3 + 6x^2$	3. $f(x) = \sin(x)^2$	5. $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$
2. $f(x) = (2x+1)^{17}$	4. $f(x) = e^{2x}$	6. $f(x) = \frac{\sin(x)}{x^2+1}$

(6 pike, nje per cdo pergjigje te sakte)
Pergjigja: Derivatet jane

1. $f'(x) = 12x^2 + 12x$.
2. $f'(x) = 34(2x+1)^{16}$.
3. $f'(x) = 2\sin(x)\cos(x)$.
4. $f'(x) = 2e^{2x}$.
5. $f'(x) = \frac{-2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$.
6. $f'(x) = \frac{\cos(x)}{x^2+1} - \frac{2x\sin(x)}{(x^2+1)^2}$.

3. Gjeni te gjithe pikat e akumulimit te bashkesise $S := \{a^2 \mid a \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$. (4 pike)

Pergjigja: Bashkesia $\mathbb{Q}$ eshte e ngjeshur ne $\mathbb{R}$ dhe funksioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ eshte i vazhdueshem dhe ka imazhin $\mathbb{R}_0^+$. Pra bashkesia $S = f(\mathbb{Q})$ eshte e ngjeshur ne bashkesine $\mathbb{R}_0^+$, dhe $\mathbb{R}_0^+$ eshte bashkesia e pikeve te akumulimit te S.

4. Gjeni nje $a \in \mathbb{R}$ te tille qe funksioni

$$f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & \text{nese } x \neq 0, \\ a & \text{nese } x = 0 \end{cases}$$

eshte i vazhdueshem ne $x = 0$, apo tregoni qe nje $a \in \mathbb{R}$ te tille nuk egziston. (4 pike)

Pergjigja: Ne kemi $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+\frac{1}{2})\pi} = 0$, por nga ana tjeter $\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{2n\pi}) = 0$ dhe $\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{(2n+\frac{1}{2})\pi}) = 1$. Pra nje a te tille qe funksioni f eshte i vazhdueshem ne $x = 0$ nuk ekziston.

5. Le te jete $S \subset \mathbb{R}$. Vertetoni apo gjeni kundershembuj:

1. Nese S nuk permban nje interval $[a, b] \neq \emptyset$, S eshte e fundem apo e numerueshem.

2. Nese S nuk eshte e ngjeshur ne asnje interval $[a, b] \neq \emptyset$, S eshte e fundem apo e numerueshem.

(4 pike)

Pergjigja: Nje kundershembull per te dyja eshte bashkesia

$$S \ = \ \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \mid a_1, a_2, \dots \in \{0, 2\} \right\}.$$

Bashkesia S eshte e panumerueshem sepse ne kemi nje bijeksion

$$f:\ S \to [0,1],\ \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \ \mapsto \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n+1}}.$$

Nga ana tjeter, cdo interval $[a, b] \neq \emptyset$ permban nje neninterval $[a', b'] \subset [a, b]$ te tille qe $[a', b'] \cap S = \emptyset$, pra bashkesia S nuk eshte e ngjeshur ne $[a, b]$.