MAT 421: Introduction to Real Analysis I
Pranvere 2012, Provim 2, Pergjigje

Stefan Kohl

1. A konvergjojne vargjet $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ me $f_n(x)$ si me poshte ne $\mathbb{R}$, dhe nese po, kemi vetem konvergjencen pikesore apo edhe konvergjencen uniforme?:

1. $f_n(x) = 0$
2. $f_n(x) = 1$
3. $f_n(x) = x$
4. $f_n(x) = n$
5. $f_n(x) = x + n$
6. $f_n(x) = nx$
7. $f_n(x) = x^2$
8. $f_n(x) = x^2 + nx$
9. $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$
10. $f_n(x) = \frac{x}{n}$
11. $f_n(x) = \frac{n}{x^2+1}$
12. $f_n(x) = \frac{x^2}{n}$

(12 pike)

Pergjigja: Konvergjence uniforme: 1., 2., 3., 7. dhe 9.; konvergjence pikesore: 10. dhe 12.; nuk konvergjojne: 4., 5., 6., 8. dhe 11.

2. Vertetoni apo gjeni kundershembuj:

1. Per cdo $c, x \in \mathbb{R}$ funksioni konstant $f_c(x) = c$ eshte i vazhdueshem ne x.
2. Per cdo $c, x \in \mathbb{R}$ funksioni konstant $f_c(x) = c$ eshte i diferencueshem ne x.
3. Cdo funksion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i cili eshte i vazhdueshem ne intervalin $[0, 1]$ eshte i vazhdueshem edhe ne intervalin $[1, 2]$.
4. Cdo funksion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i cili eshte i vazhdueshem ne cdo $x \in \mathbb{R}$ eshte i diferencueshem ne $x = 0$.
5. Nese $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eshte nje funksion i vazhdueshem te tille qe $\forall x \in \mathbb{Q} \;\; f(x) \in \mathbb{Q}$, ne kemi gjithmon $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \;\; f(x) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

6. Cdo funksion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ te tille qe $f([0,1] \cup [2,3]) = [0,1]$ nuk eshte i vazhdueshem.

7. Cdo varg funksionesh (f_n) i cili konvergjon uniformisht ne intervalin $[0, 1-\epsilon]$ per cdo $\epsilon > 0$ konvergjon uniformisht edhe ne intervalin $[0,1]$.

(14 pike)

Pergjigja:

1. Vertetim: Le te jete $(x_n) \subset \mathbb{R}$ nje varg i cfaredoshem te tille qe $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Tani ne kemi $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} c = c = f(x)$, pra sipas perkufizimin funksioni f eshte i vazhdueshem ne x.

2. Vertetim: Le te jete $(x_n) \subset \mathbb{R} \setminus \{x\}$ nje varg i cfaredoshem te tille qe $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Atehere ne kemi $\lim_{n\to\infty}(f(x_n) - f(x))/(x_n - x) = \lim_{n\to\infty}(c-c)/(x_n - x) = 0$, pra sipas perkufizimin funksioni f eshte i diferencueshem ne x.

3. Kundershembull: $f(x) = x$ nese $x \neq 2$, dhe $f(2) = 0$.

4. Kundershembull: $f(x) = |x|$.

5. Kundershembull: $f(x) = 0$.

6. Kundershembull: $f(x) = x$ nese $x < 1$, dhe $f(x) = 1$ nese $x \geqslant 1$.

7. Kundershembull: $f_n = x^n$.

3. Gjeni nje funksion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ te vazhdueshme te tille qe $f([0,1]) =]0,1[$, apo tregoni qe nje funksion te tille nuk egziston. (4 pike)

Pergjigja: Nje funksion te tille nuk egziston. Vertetim: Le te jete f nje funksion i vazhdueshem te tille qe $f([0,1]) =]0,1[$. Zgjidhni nje varg $(x_n) \subset]0,1[$ te tille qe $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, dhe per cdo $n \in \mathbb{N}$ zgjidhni $y_n \in [0,1]$ te tille qe $f(y_n) = x_n$. Atehere ne kemi $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = 0$. Sepse intervali $[0,1]$ eshte i kufizuar, vargu (y_n) ka nje nenvarg (y_{n_i}) i cili konvergjon. Le te jete y limiti i tij. Sepse funksioni f eshte i vazhdueshem ne kemi $f(y) = 0$. Por intervali $[0,1]$ eshte i mbyllur, pra $y \in [0,1]$, ne kundershtim me $f([0,1]) =]0,1[$. $\square$