MAT 421: Introduction to Real Analysis I
Pranvere 2012, Provim 2

Stefan Kohl

Data: 07.06.2012, Ora: 14:00 - 15:30

Emri, Mbiemri: ______________________________

Pergjigjuni 3 pyetje e meposhtme. Nuk i lejohet te perdore asgje pervec leter e bardhe dhe nje stilolaps. Maksimumi i pikeve te mundshme eshte 30.

1. A konvergjojne vargjet $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ me $f_n(x)$ si me poshte ne $\mathbb{R}$, dhe nese po, kemi vetem konvergjencen pikesore apo edhe konvergjencen uniforme?:

1. $f_n(x) = 0$
2. $f_n(x) = 1$
3. $f_n(x) = x$
4. $f_n(x) = n$
5. $f_n(x) = x + n$
6. $f_n(x) = nx$
7. $f_n(x) = x^2$
8. $f_n(x) = x^2 + nx$
9. $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$
10. $f_n(x) = \frac{x}{n}$
11. $f_n(x) = \frac{n}{x^2+1}$
12. $f_n(x) = \frac{x^2}{n}$

(12 pike)

2. Vertetoni apo gjeni kundershembuj:

1. Per cdo $c, x \in \mathbb{R}$ funksioni konstant $f_c(x) = c$ eshte i vazhdueshem ne x.
2. Per cdo $c, x \in \mathbb{R}$ funksioni konstant $f_c(x) = c$ eshte i diferencueshem ne x.
3. Cdo funksion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i cili eshte i vazhdueshem ne intervalin $[0, 1]$ eshte i vazhdueshem edhe ne intervalin $[1, 2]$.
4. Cdo funksion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i cili eshte i vazhdueshem ne cdo $x \in \mathbb{R}$ eshte i diferencueshem ne $x = 0$.
5. Nese $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eshte nje funksion i vazhdueshem te tille qe $\forall x \in \mathbb{Q} \;\; f(x) \in \mathbb{Q}$, ne kemi gjithmon $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \;\; f(x) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
6. Cdo funksion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ te tille qe $f([0, 1] \cup [2, 3]) = [0, 1]$ nuk eshte i vazhdueshem.
7. Cdo varg funksionesh (f_n) i cili konvergjon uniformisht ne intervalin $[0, 1 - \epsilon]$ per cdo $\epsilon > 0$ konvergjon uniformisht edhe ne intervalin $[0, 1]$.

(14 pike)

3. Gjeni nje funksion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ te vazhdueshme te tille qe $f([0, 1]) =]0, 1[$, apo tregoni qe nje funksion te tille nuk egziston. (4 pike)