

УДК 512.542

Коновалов О.Б., Пилявська О.С., Шатохіна Ю.В.

**Дослідження властивостей циклічних підгруп 2-груп малих порядків
за допомогою системи комп'ютерної алгебри GAP.**

Розглядається наступна задача: «Нехай p -група G задовольняє умові: якщо Z - циклічна підгрупа групи G , то або $Z \leq Z(G)$, або $Z \cap Z(G) = \{1\}$. Класифікувати всі такі групи». Раніше Пилявська і Шатохіна довели, що регулярні p -групи, що задовольняють вказаній умові вичерпуються абелевими групами та групами експоненти p . В даній роботі ми розглядаємо неабелеві 2-групи як мінімальний приклад нерегулярних груп і досліджуємо їх за допомогою системи комп'ютерної алгебри GAP. Одержано: 1) кожна група, порядок якої менший за 2^7 , має циклічну підгрупу, що не міститься в центрі і має з ним нетривіальний перетин; 2) існують дві групи порядку 2^7 і вісім груп порядку 2^8 , у яких кожна циклічна підгрупа або міститься в центрі або має з ним нетривіальний перетин. Вказано задання знайдених груп за допомогою твірних та визначаючих співвідношень.

Konovalov A., Pyliavska O., Shatokhina Iu.

**Investigation of cyclic subgroups of 2-groups of small order using the
computational algebra system GAP.**

Y. Berkovich proposed the next problem: "Suppose that p -group G satisfies the following condition: if Z is a cyclic subgroup of G , then either $Z \leq Z(G)$ or $Z \cap Z(G) = \{1\}$. Classify all such groups". Earlier Pyliavska and Shatokhina have proved that all regular p -groups satisfying this condition are either abelian p -groups or p -groups with exponent p . We used the computational algebra system GAP to search for examples of non-abelian non-regular 2-groups with the same property. We obtained that: 1) each non-abelian group of order smaller than 2^7 has a cyclic subgroup which is not contained in the center of the group and has a non-trivial intersection with it; 2) there are exactly two non-regular groups of order 2^7 and eight non-regular groups of order 2^8 which satisfy the condition from the Berkovich's problem.

1. Постановка задачі

Я.Беркович в своїй книзі [1] сформулював наступну проблему: “Нехай p -група G задовольняє умові: якщо C є циклічною підгрупою групи G , то або $C \leq Z(G)$, або $C \cap Z(G) = \{1\}$. Класифікувати всі такі групи”. Надалі p -групу G , що задовольняє даній умові, будемо називати ЗС-групою.

В роботі [2] авторами було доведено, що абелеві p -групи та групи експоненти p вичерпують всі регулярні p -групи, які задовольняють цій умові. Спроби знайти приклади ЗС-груп серед нерегулярних груп порядку $2^3, 2^4$ дали негативний результат. Виникло природне питання: чи існують групи, що задовольняють вказаній умові, крім абелевих груп та груп експоненти p ? Такі групи надалі будемо називати нетривіальними ЗС-групами.

Нагадаємо, що p -група G називається регулярною, якщо для будь-яких елементів $g, h \in G$ має місце співвідношення $g^p h^p = (gh)^p \prod_i s_i^p$, де s_i є елементом комутанта групи $\langle g, h \rangle$, породженої елементами g, h . Відомо (див. [3], [4]), що кожна p -група, клас нільпотентності якої менше, ніж p , або порядок якої менше, ніж p^{p+1} , є регулярною, а всі неабелеві групи порядку 2^n є нерегулярними. Для пошуку прикладів нерегулярних ЗС-груп було використано систему комп’ютерної алгебри GAP [5]. Одним з її компонентів є спеціальна мова, за допомогою якої можна створювати власні програми і розширювати систему GAP. Нами було створено програму, яка дозволяє для кожної p -групи знайти всі циклічні підгрупи і дослідити їх перетин з центром.

Задача «розглянути всі p -групи заданого порядку і виділити серед них групи з певними властивостями» вирішується значно легше, якщо не будувати кожну групу окремо, а користуватись списками всіх неізоморфних груп заданого порядку. Як відомо, проблема ізоморфізму груп у загальному випадку є алгоритмічно нерозв’язною, тобто неможливо побудувати алгоритм, за допомогою якого для двох довільних груп, заданих твірними і визначальними співвідношеннями, можна було б визначити, чи є ці групи ізоморфними, чи ні [6]. Існують методи [7] побудови всіх неізоморфних p -груп даного порядку, що мають ітеративний характер, тобто для побудови груп більшого порядку необхідна інформація про будову груп меншого порядку, а також їх груп автоморфізмів. Отже, практичне застосування їх можливо тільки для «груп малих порядків». Для $p = 2$ такими

групами на даний час є групи, порядок яких не перевищує 2^9 ([8-11]) і для $p \geq 3$ - групи, порядок яких не перевищує p^7 ([5, 12-17]).

Зрозуміло, що разом з порядком групи різко зростає не тільки кількість груп даного порядку, але і складність будови кожної групи. А отже і час, що потрібен на побудову як самої групи, так і на побудову решітки її підгруп. Цей час значно скорочується, якщо користуватися стандартними бібліотеками груп, що входять до складу GAP, зокрема бібліотекою `SmallGroups` [18-19]. Бібліотека `SmallGroups` містить всі групи, порядок яких не перевищує 2000, за винятком груп порядку 2^{10} . Нерегулярні p -групи з цього списку можуть мати лише такі порядки: 3^n ($n = 5, 6$) і 2^n ($n = 3, \dots, 9$).

Кожна група з бібліотеки має своє позначення для її типу ізоморфізму, яке має вигляд $[n1, n2]$, де $n1$ - порядок групи, $n2$ - її номер у списку груп порядку $n1$. Групу, яка має тип ізоморфізму $[n1, n2]$, можна викликати з бібліотеки за допомогою функції `SmallGroup`, наприклад: `S:=SmallGroup(16,8);`

2. Алгоритм

В даній роботі ми зосередимось на властивостях груп, порядок яких є степенем 2. Пошук ZC-груп здійснювався за наступним алгоритмом:

1. Вибираємо по черзі групу заданого порядку 2^n . Оскільки для абелевих груп та груп експоненти p проблема вирішена, вилучаємо їх із розгляду.
2. Для неабелевої групи з експонентою більше p досліджуємо всі циклічні підгрупи групи G , порядок яких більше p . Щоб зменшити обсяг перевірки, розбиваємо множину всіх підгруп групи на класи спряжених елементів. Оскільки всі підгрупи, що належать одному класу, мають однаковий тип і однаковий перетин з центром, то досить вибрати один представник цього класу, і перевіряти умову тільки для нього.
3. Вибираючи по одному елементу з множини представників, перевіряємо, чи є це циклічна підгрупа. Якщо так, то визначаємо її перетин з центром. Якщо хоча б одна циклічна підгрупа групи G не міститься в центрі, але має з ним нетривіальний перетин, то переходимо до наступної групи. Якщо ж для всіх циклічних підгруп групи G , які не містяться в центрі, одержуємо, що вони мають з центром тривіальний перетин, то виводимо на екран повідомлення,

що у даної групи немає циклічних підгруп, які мають нетривіальний перетин з її центром. Переходимо до наступної групи.

3. Реалізація

Цей алгоритм було реалізовано на мові GAP. Для його реалізації та тестування було створено такі функції:

- 1) Функція `PrintRelations(G)`, яка виводить на екран для візуального контролю визначальні співвідношення групи G .

Наприклад:

```
gap> G:=SmallGroup(16,4);
# Стандартна функція, що викликає з бібліотеки SmallGroups
# групу, яка має номер 4 у списку груп порядку 16.
  <pc group of size 16 with 4 generators>
gap> PrintRelations(G);
  g1 ^ 2 = g4
  g2 ^ 2 = g3
  g3 ^ 2 = id
  g4 ^ 2 = id
  g2 ^ g1 = g2*g3
```

При цьому група порядку p^n задається n твірними і визначаючими співвідношеннями як поліциклічна група, тобто як n -кратне розширення n циклічних груп простого порядку. Для обчислення визначаючих співвідношень поліциклічна група (pc-group) G має бути задана як поліциклічно-представлена група (pcp-group). В системі GAP можливість виконання дій над певним алгебраїчним об'єктом сильно залежить від способу його представлення.

Функція `IsGoodZCGroup`, яка для p -групи G порядку $size$, що має номер i у списку `SmallGroups`, видає значення *false*, якщо група G має хоча б одну циклічну підгрупу, яка не міститься в центрі, але має з ним нетривіальний перетин, і значення *true*, якщо всі підгрупи групи G або містяться в центрі групи, або мають в перетині з центром тільки одиничний елемент.

Наприклад:

```
gap> IsGoodZCGroup(8,3); # група Діедра порядку 8
      false
gap> IsGoodZCGroup(128,36);
      true
```

Зауваження . В роботі [20] доведено, що група $(128, 36)$ є мініальною 2-породженою нерегулярною 2-групою, в якій всі циклічні підгрупи мають тривіальний перетин з центром. Отже, на вказаних прикладах функція працює коректно.

3) Функція `ZCGroups`, яка для груп заданого порядку 2^n повертає список номерів нетривіальних ZC-груп або видає повідомлення, що нетривіальних ZC-груп вказаного порядку не існує.

4. Текст програми

Функція `PrintRelations`.

```
PrintRelations:=function(G) # G - група, задана як pс-група
local f1,H;
    # Для даної групи будується ізоморфна pср-група
f1:=IsomorphismPcpGroup(G); H:=Image(f1);
PrintPcpPresentation(H);
end;
```

Функція `IsGoodZCGroup`.

```
# Функція, що за номером p-групи в списку SmallGroups
# визначає, чи має вона підгрупи
# з нетривіальним перетином з центром.
# Повертає значення true , якщо такі підгрупи є,
# і false в протилежному випадку.

IsGoodZCGroup := function( size, nr )
local b, G, cc, cl, c;
G := SmallGroup( size, nr );
    # За заданим номером вибираємо групу зі списку SmallGroups.
if IsAbelian(G) then return false;
    # Відкидаємо неабелеві групи
elif Exponent(G)=PrimePGroup(G) then
    # і групи простої експоненти, оскільки відомо,
    # що вони завжди є ZC-групами.
return false;
else
cc := ConjugacyClassesSubgroups(G);
    # Стандартна функція,
    # що обчислює класи спряжених підгруп групи G.
for cl in cc do
c := Representative(cl);
    # Стандартна функція,
    # що з кожного класу вибирає представника.
if IsCyclic(c) then
    # Стандартна функція,
    # що перевіряє, чи є дана підгрупа циклічною.
if not IsSubgroup( Center(G), c ) then
```

```

# Стандартна функція, що перевіряє,
# чи є дана підгрупа с підгрупою центру.
    if Size( Intersection( Center(G), c ) ) > 1 then
        # Якщо підгрупа с не міститься в центрі,
        # то обчислюємо # порядок її перетину з центром.
        # Якщо порядок більше 1, то групу G відкидаємо.
        return false;
    fi;
fi;
od;
Print("The group [", size, ", ", nr,
"] is non-regular ZC-group", "\n");
return true;
fi;
end;

```

Функція ZCGroup.

```

#Функція для дослідження 2-груп заданого порядку
ZCGroup:=function(n)
local size, # порядок груп, які досліджуються;
    i, # номер досліджуваної групи у списку груп
        # заданого порядку в бібліотеці SmallGroups;
    k, # кількість нетривіальних ZC-груп серед груп
        # заданого порядку;
    L, # список номерів груп заданого порядку в бібліотеці
        # SmallGroups, які є нетривіальними ZC-групами;
    G; # група, що досліджується;
size:=2^n;
k:=0; L:=[];
    # створюємо порожній список L
for i in [1..NumberSmallGroups(size)] do
    if IsGoodZCGroup(size,i)=true then
        # перевіряємо, чи є група з номером (size,i)
        # ZC-групою
        # Якщо так, то додаємо номер ZC-групи до списку L
        k:=k+1; L[k]:=i;
    fi;
od;
if k=0 then
    Print("Non-regular ZC-groups of order 2^",n,);
    Print(" do not exist \n");
else Print(k," non-regular ZC-groups are found \n", L, "\n");
fi;
return L;
end;

```

5. Результати

Продемонструємо роботу з програмою.

```
gap> l:=ZCGroup(3);
```

```

Non-regular ZC-groups of order 2^3 do not exist
[ ]
gap> l:=ZCGroup(4);
Non-regular ZC-groups of order 2^4 do not exist
[ ]

```

Як і при безпосередньому обрахунку, одержуємо, що серед груп порядку 8 та 16 нетривіальних ZC-груп немає.

```

gap> l:=ZCGroup(5);
Non-regular ZC-groups of order 2^5 do not exist
[ ]
gap> l:=ZCGroup(6);
Non-regular ZC-groups of order 2^6 do not exist
[ ]

```

Отже, серед груп порядку 32 і 64 нетривіальних ZC-груп також немає. Чи існують взагалі набелеві 2-групи, що задовольняють вказаній умові?

```

gap> l:=ZCGroup(7);
The group G=[ 128, 36 ] is non-regular ZC-group
The group G=[ 128, 836 ] is non-regular ZC-group
2 ZC-groups are found
[36,836]

```

Отже, знайдено 2 групи порядку 128, які є ZC-групами. Це групи, які в бібліотеці SmallGroups мають відповідно номери [128,36] і [128,836]. Визначальні співвідношення для цих груп одержимо за допомогою функції PrintRelations(G).

```

gap> G1:=SmallGroup(128,36);
<pc group of size 128 with 7 generators>
gap> PrintRelations(G1);
g1 ^ 2 = g4, g2 ^ 2 = g5, g3 ^ 2 = id, g4 ^ 2 = id,
g5 ^ 2 = id, g6 ^ 2 = id, g7 ^ 2 = id, g2 ^ g1 = g2*g3,
g3 ^ g1 = g3*g6, g3 ^ g2 = g3*g7, g4 ^ g2 = g4*g6,
g5 ^ g1 = g5*g7
gap> G2:=SmallGroup(128,836);
<pc group of size 128 with 7 generators>
gap> PrintRelations(G2);
g1 ^ 2 = g4*g5*g6, g2 ^ 2 = g4*g5, g3 ^ 2 = g4,
g4 ^ 2 = id, g5 ^ 2 = id, g6 ^ 2 = id, g7 ^ 2 = id,
g2 ^ g1 = g2*g4, g3 ^ g1 = g3*g5, g3 ^ g2 = g3*g6,
g4 ^ g1 = g4*g7, g5 ^ g1 = g5*g7, g5 ^ g3 = g5*g7,
g6 ^ g2 = g6*g7

```

Для груп порядку 256 одержали:

```

gap> l:=ZCGroup(8);
The group G=[256, 337] is non-regular ZC-group

```

```

The group G=[256, 414] is non-regular ZC-group
The group G=[256, 1087] is non-regular ZC-group
The group G=[256, 1089] is non-regular ZC-group
The group G=[256, 3678] is non-regular ZC-group
The group G=[256, 3679] is non-regular ZC-group
The group G=[256, 4306] is non-regular ZC-group
The group G=[256, 16834] is non-regular ZC-group
8 non-regular ZC-groups are found

[337, 414, 1087, 1089, 3678,
3679, 4306, 16834]

```

Вивчаючи визначальні співвідношення знайдених груп, легко можна побачити, що групи (256,1087) та (256,16834) є прямим добутком циклічної групи порядку 2 і групи (128, 36) та групи (128, 836) відповідно. Визначальні співвідношення вказаних груп 128-го порядку наведені вище. Отже, задля економії місця, ми наведемо тільки визначальні співвідношення інших 6-ти груп порядку 256.

```

gap> G1:=SmallGroup(256,337);
<pc group of size 256 with 8 generators>
g1 ^ 2 = g4, g2 ^ 2 = g7, g3 ^ 2 = id, g4 ^ 2 = g6,
g5 ^ 2 = id, g6 ^ 2 = id, g7 ^ 2 = id, g8 ^ 2 = id,
g2 ^ g1 = g2*g3, g3 ^ g1 = g3*g5, g3 ^ g2 = g3*g8,
g4 ^ g2 = g4*g5, g4 ^ g3 = g4*g7, g5 ^ g1 = g5*g7,
g5 ^ g4 = g5*g8, g6 ^ g2 = g6*g8, g7 ^ g1 = g7*g8
gap> G2:=SmallGroup(256,414);
<pc group of size 256 with 8 generators>
gap> PrintRelations(G2);
g1 ^ 2 = g4, g2 ^ 2 = g5, g3 ^ 2 = g6*g7, g4 ^ 2 = id,
g5 ^ 2 = id, g6 ^ 2 = id, g7 ^ 2 = id, g8 ^ 2 = id,
g2 ^ g1 = g2*g3, g3 ^ g1 = g3*g5, g3 ^ g2 = g3*g6,
g4 ^ g2 = g4*g5*g6*g7, g4 ^ g3 = g4*g7, g5 ^ g1 = g5*g7,
g5 ^ g3 = g5*g8, g6 ^ g1 = g6*g8, g6 ^ g2 = g6*g8,
g7 ^ g2 = g7*g8
gap> G3:=SmallGroup(256,1089);
<pc group of size 256 with 8 generators>
gap> PrintRelations(G3);
g1 ^ 2 = g5, g2 ^ 2 = g6, g3 ^ 2 = id, g4 ^ 2 = id,
g5 ^ 2 = id, g6 ^ 2 = id, g7 ^ 2 = id, g8 ^ 2 = id,
g2 ^ g1 = g2*g4, g3 ^ g1 = g3*g7, g4 ^ g1 = g4*g7,
g4 ^ g2 = g4*g8, g5 ^ g2 = g5*g7, g6 ^ g1 = g6*g8.
gap> G4:=SmallGroup(256, 3678);
gap> PrintRelations(G4);
g1 ^ 2 = g4*g5*g6, g2 ^ 2 = g4*g5, g3 ^ 2 = g4, g4 ^ 2 = id,
g5 ^ 2 = id, g6 ^ 2 = id, g7 ^ 2 = id, g8 ^ 2 = id,
g2 ^ g1 = g2*g4, g3 ^ g1 = g3*g5, g3 ^ g2 = g3*g6,
g4 ^ g1 = g4*g7, g4 ^ g2 = g4*g8, g5 ^ g1 = g5*g7*g8,

```

```

g5 ^ g2 = g5*g8, g5 ^ g3 = g5*g7, g6 ^ g1 = g6*g8,
g6 ^ g2 = g6*g7, g6 ^ g3 = g6*g8.
gap> G5:=SmallGroup(256, 3679);
<pc group of size 256 with 8 generators>
gap> PrintRelations(G5);
g1 ^ 2 = g4*g5*g6*g7, g2 ^ 2 = g4*g5, g3 ^ 2 = g4,
g4 ^ 2 = id, g5 ^ 2 = id, g6 ^ 2 = id, g7 ^ 2 = id,
g8 ^ 2 = id, g2 ^ g1 = g2*g4, g3 ^ g1 = g3*g5,
g3 ^ g2 = g3*g6, g4 ^ g1 = g4*g7, g4 ^ g2 = g4*g8,
g5 ^ g1 = g5*g7*g8, g5 ^ g2 = g5*g8, g5 ^ g3 = g5*g7,
g6 ^ g1 = g6*g8, g6 ^ g2 = g6*g7, g6 ^ g3 = g6*g8.
gap> G6:=SmallGroup(256, 4306);
<pc group of size 256 with 8 generators>
gap> PrintRelations(G6);
g1 ^ 2 = g7, g2 ^ 2 = g4*g5, g3 ^ 2 = g4, g4 ^ 2 = id,
g5 ^ 2 = id, g6 ^ 2 = id, g7 ^ 2 = id, g8 ^ 2 = id,
g2 ^ g1 = g2*g4, g3 ^ g1 = g3*g5, g3 ^ g2 = g3*g6,
g4 ^ g1 = g4*g8, g4 ^ g2 = g4*g8, g5 ^ g2 = g5*g8,
g5 ^ g3 = g5*g8, g6 ^ g1 = g6*g8, g6 ^ g2 = g6*g8,
g6 ^ g3 = g6*g8, g7 ^ g2 = g7*g8.

```

6. Подяка

Автори висловлюють щирю подяку проф. З. Янку та проф. В.Чепулічу, які звернули нашу увагу на цю задачу.

Bibliography

1. *Berkovich Y.* Groups of prime power order. - (In preparation)
2. *Pylyavska O., Shatohina Iu.* The p -groups satisfying the condition: each cyclic subgroup is contained in the center or has a trivial intersection with it // Наукові записки НаУКМА. – Т.51. Фізико-математичні науки. – 2006. – С.3-4.
3. *Холл М.* Теория групп. – М.: ИЛ, 1962. – 468 с.
4. *Huppert B.* Endliche Gruppen, I. – Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York. – 1967. – p.794.
5. The GAP Group, GAP -- Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.4.10; 2007. <http://www.gap-system.org>
6. Новиков П.С. Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества слов в теории групп // Тр. Математического ин-та АН СССР. - М., 1955. - т.44.

7. *Newman M.F.* Determination of groups of prime-power order // *Group Theory* (Canberra, 1975), *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 573, P. 73-84. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1977.
8. *Hall M.Jr, Senior J.K.* The Groups of order 2^6 ($n \leq 6$). – Macmillan, New York, 1964.
9. *James R, Newman M.F., and O'Brien E.A.* The groups of order 128 // *J. Algebra* 129, 1990, P.136 – 158.
10. *O'Brien E.A.* The groups of order 256 // *J. Algebra* 143, 1991, P.219 – 235.
11. *Eick B., O'Brien E. A.* The groups of order 512 // *Proceedings of the Abschlussstagung zum DFG Schwerpunkt Algorithmische Algebra und Zahlentheorie*, Springer, 1998, P. 379 – 380.9.
12. *James R.* The Groups of Order p^6 (p and Odd Prime). // *Mathematics of Computation*, Vol. 34, No. 150 (Apr., 1980), P. 613-637.
13. *Пулявская О.С.* Классификация групп порядка p^6 ($p > 3$). – Рук. деп. в ВИНТИ, №1877-83 Деп. – Рук. – с. 63.
14. *Пулявская О.С.* Применение матричных задач к классификации групп порядка p^6 , $p > 3$. – В кн.: *Линейная алгебра и теория представлений*. – Киев, Ин-т математики АН УССР, 1983. – С. 86 – 99.
15. *Newman M. F., O'Brien E. A., and Vaughan-Lee M. R.* Groups and nilpotent Lie rings whose order is the sixth power of a prime // *Journal of Algebra*, V.278, 2003, P.383 – 401.
16. *O'Brien E.A., Vaughan-Lee M.R.* The groups with order p^7 for odd prime p // *Journal of Algebra*, Vol. 292, 2005, P.243 – 258.
17. *Eick B. O'Brien E.A.* Enumerating p -groups // *J. Austral. Math. Soc.*, Vol. 67, 1999, P.191 – 205.
18. *Besche H., Eick B., O'Brien E. A.* The groups of order at most 2000 // *Electronic research announcements of the American Mathematical Society*. February 12, 2001. S1079-6762(01)00087-7. Volume 7, P.1–4.
19. The Small Groups Library // <http://www.tu-bs.de/~beick/small/small.html>

Відомості про авторів.

Коновалов Олександр Борисович, кандидат фізико-математичних наук.

Пилявська Ольга Степанівна, доцент кафедри математики Національного університету “Києво-Могилянська Академія”.

Наукові інтереси: теорія скінченних p -груп.

Шатохіна Юлія Вячеславівна, аспірант Інституту космічних досліджень НАН та НКА України.

Наукові інтереси: теорія груп, символічні обчислення, математичне моделювання, динамічні системи, самоорганізація, біофізика, квантові комп'ютери.